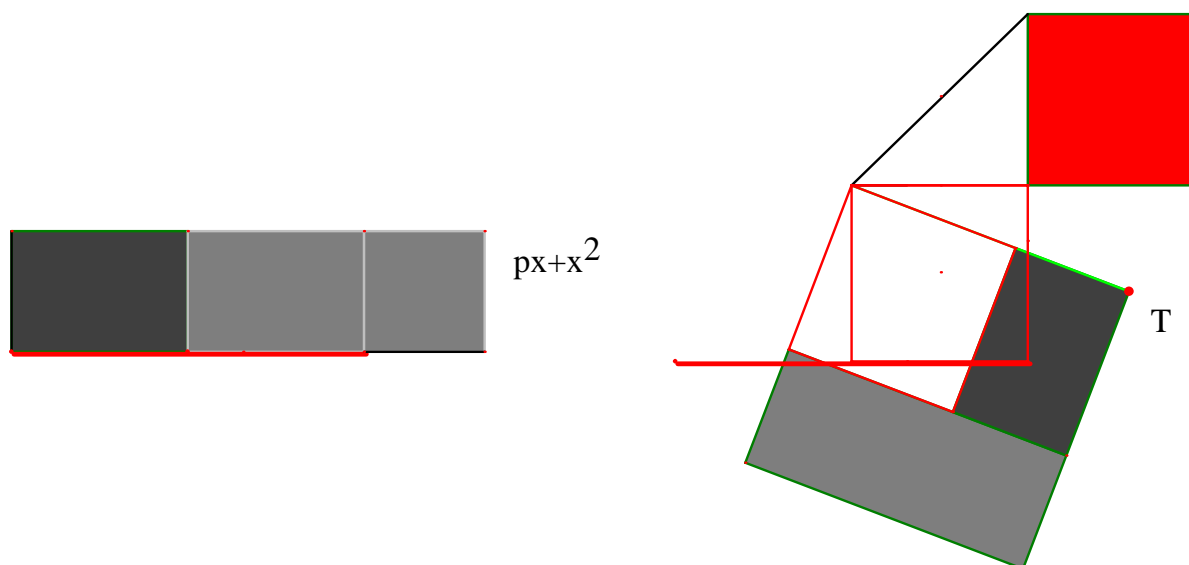


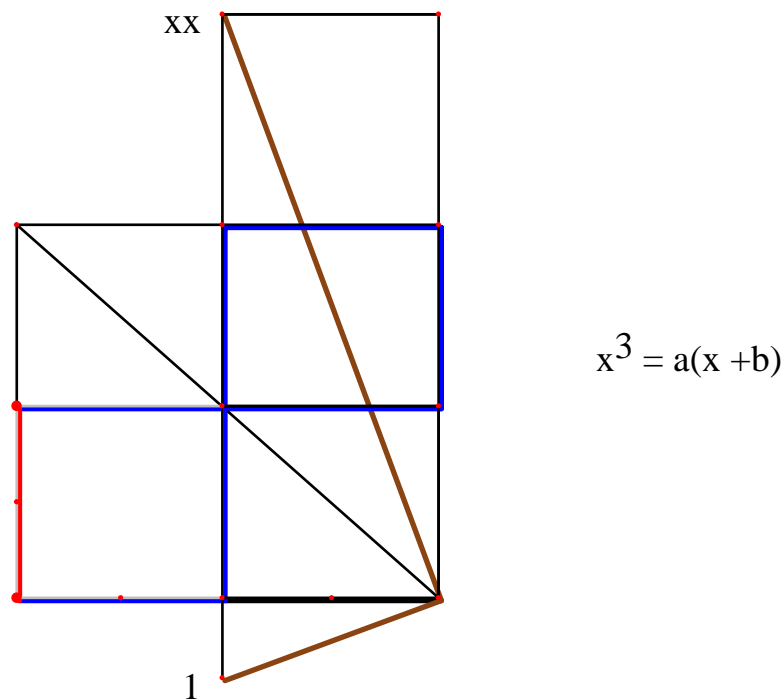
Franco Ghione (Dipartimento di Matematica, Università di Roma “Tor Vergata”)

Figure interattive per animare le equazioni di Euclide, Bombelli e Al-Khayyam

Vi sono motivi non trascurabili per ritenere utile l’insegnamento della geometria euclidea non solo per i suoi contenuti o per il metodo assiomatico deduttivo che essa comporta quanto piuttosto per il suo valore altamente formativo che nasce dal confronto tra un livello concreto, fatto di oggetti realizzabili con la riga e col compasso, e un livello astratto fatto di concetti e relazioni tutt’altro che banali. La possibilità di sostituire la riga e il compasso con un mondo geometrico simulabile col calcolatore ripropone su un nuovo terreno la didattica della geometria aprendo scenari spesso imprevedibili, ricchi di nuove possibilità cognitive, di nuove occasioni di studio. La possibilità di creare immagini isomorfe al contenuto verbale di una determinata proposizione matematica, facendo interagire tra loro il pensiero logico verbale con quello immaginativo, come recenti studi in ambito neuro cognitivo hanno stabilito, facilita la comprensione di quella proposizione arricchendo i modelli mentali che si costruiscono intorno a lei, aiutando la memoria e rendendo più stabile il suo significato [1]. Le nuove tecnologie permettono di realizzare ambienti didattici fortemente interattivi nei quali si moltiplicano le possibilità di verificare le proprie intuizioni, di “vedere” gli oggetti matematici “al lavoro”, di capire più a fondo gli aspetti teorici della disciplina. Anche i testi che aiutano a registrare le esperienze più significative per riproporle ad altri, si arricchiscono di nuove possibilità: non pensiamo solo agli ipertesti o alle potenzialità della rete come fonte di informazione, quanto piuttosto alla possibilità di inserire “figure geometriche animate” all’interno di un testo di matematica che interagiscono col lettore, attraverso la rete Web, riproducendo anche l’esperienza visiva dinamica che l’argomento comporta. In questo intervento vogliamo fare alcuni esempi legati soprattutto al contesto scolastico preuniversitario per illustrare queste nuove potenzialità. Gli esempi che abbiamo scelto tendono ad approfondire, in tre situazioni differenti, il rapporto strettissimo tra l’Algebra e la Geometria. Questo rapporto, come è noto, non si stabilisce solo con la geometria cartesiana ma ha la sua genesi nella così detta Algebra geometrica di Euclide, sviluppata dalla tradizione algebrista italiana (Fibonacci, Tartaglia Cardano Bombelli) e nella teoria delle coniche di Apollonio sviluppata dalla matematica araba del IX , X e XI secolo d. C. che approderà alla moderna geometria Algebrica. La teoria euclidea [2, Gli Elementi, Libro II] si riferisce allo studio delle equazioni di secondo grado e a come sia possibili “costruire” la soluzione in funzione dei coefficienti dell’equazione.



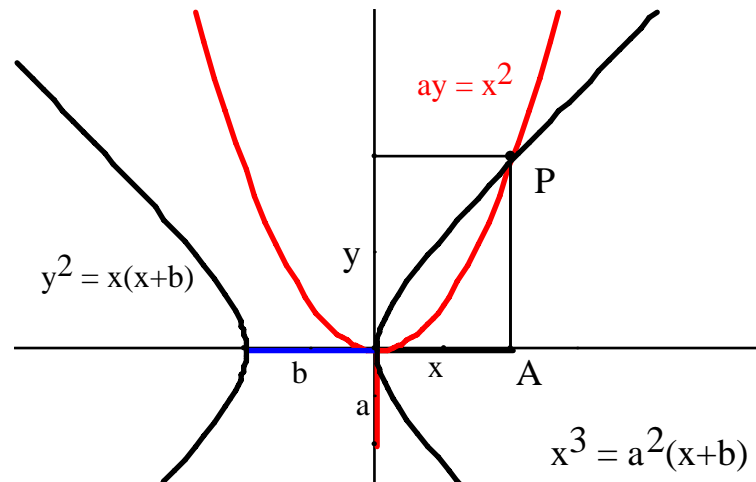
Poiché i numeri che compaiono, compresa l'incognita, sono delle grandezze assimilate alla misura di un segmento, poiché queste misure sono numeri positivi, occorre distinguere quando la grandezza si aggiunge o si toglie (ad un'altra più grande) e questo comporta lo studio di diverse tipologie di equazioni. Pagato questo prezzo lo spettacolo che si presenta sullo schermo del calcolatore è molto stimolante: coefficienti ed incognita non sono più lettere dell'alfabeto ma segmenti ognuno con la loro grandezza che col mouse posso modificare: sono gli attori dello spettacolo i coefficienti hanno un ruolo e l'incognita, la protagonista della scena, un altro. Tutti questi segmenti messi insieme costruiscono una trama cioè una figura e l'incognita, nell'ultimo atto, si modifica fino a far combaciare tutti gli elementi in un lieto fine. Fuori di metafora il diverso ruolo dei coefficienti e dell'incognita, lettere entrambi che rappresentano numeri non assegnati e che tanto creano confusione se male presentati agli allievi, nel contesto geometrico-dinamico non presentano alcuna difficoltà cognitiva. Di entrambi possiamo modificare col mouse la dimensione ma la differenza dei ruoli è nella struttura stessa delle costruzioni. Questa stessa strada è stata seguita anche dalla scuola italiana di algebristi rinascimentali per risolvere le equazioni di terzo e quarto grado.



Durante questo intervento mostreremo la costruzione di Bombelli [3] relativa a una equazione cubica sottolineando la direzione di ricerca che Bombelli implicitamente indica introducendo i numeri immaginari che porterà successivamente allo studio delle equazioni algebriche e della loro solubilità coi metodi basati sulla teoria dei campi e delle loro estensioni.

L'approccio arabo prende le mosse dalla teoria delle coniche di Apollonio che possono essere facilmente costruite con un "compasso perfetto" non a caso inventato proprio dagli arabi capace di tracciare con continuità ogni tipo di conica. Il computer traccia, come luogo, ogni tipo di conica con assoluta semplicità e precisione e possiamo quindi riproporre facilmente i metodi arabi in un laboratorio matematico, per risolvere le equazioni di terzo grado. Seguiamo le idee di Al-Khayyam [4]. I coefficienti dell'equazione individuano in modo opportuno due coniche (e in questo si gioca l'abilità del matematico che è capace di trovare le due coniche giuste) le quali si intersecano in punti le cui ascisse, a ben guardare, sono le soluzioni dell'equazione. Tutto quanto può essere facilmente costruito con un software di geometria dinamica: i coefficienti dell'equazione sono segmenti modificando i quali si modificano le due coniche. Si costruiscono così delle famiglie di

curve a uno o più parametri (un nuovo termine matematico responsabile anch'esso di confusioni inenarrabili nelle menti dei giovani allievi) che possiamo far muovere sullo schermo, modificando col mouse le grandezze dei parametri, farle interagire per “vedere” quello che succede. Quello che succede è interessantissimo: un punto di intersezione resta fisso per come sono state costruite le due coniche, un altro si trova sempre perché le coniche entrano una nell'altra, ma, in determinate circostanze, cioè per determinati valori dei parametri, le soluzioni diventano due o tre!



Questa semplice esperienza, che cercheremo di percorrere insieme nel corso di questo intervento, apre le porte a sviluppi straordinari, che riguardano lo studio delle intersezioni di due curve algebriche o più in generale di due varietà, problemi difficili in parte ancora aperti. Anche la dimostrazione del teorema fondamentale dell'Algebra che Gauss, nella sua tesi di laurea, affronterà con metodi topologici ha la sua genesi in questa idea che resterà, nella trattazione araba e fino a tutto il XX secolo, un'idea solo intuitiva: se una curva chiusa ha un punto interno ed uno esterno a un'altra curva chiusa allora le due curve hanno almeno un punto in comune.

Riferimenti bibliografici

- [1] L. Catastini, (1990). *Il pensiero allo specchio*, Firenze: La Nuova Italia
- [2] Euclide (1970) *Gli Elementi*, Torino U.T.E.T.
- [3] R. Bombelli, (1966) *Algebra*, Milano: Feltrinelli
- [4] Al- Khayyam (1999) *Al-Khayyam Mathématicien*., Paris: Albert Blanchard