Paolo Boieri (Dipartimento di Matematica – Politecnico di Torino)
Cristiano Dané (Liceo Scient. Volta – Torino)

# *La derivata: un approccio dinamico*

**Un diverso approccio all'Analisi**

L'approccio tradizionale all'Analisi negli ultimi anni della scuola secondaria prevede una scansione degli argomenti che possiamo così sintetizzare:

1. il concetto di limite (a partire dal caso di limite finito al finito);
2. i teoremi sui limiti;
3. i limiti notevoli e il calcolo di limiti;
4. la derivata;
5. l'utilizzo della derivata (monotonia, convessità, applicazioni alla Fisica, …).

Questa impostazione presenta alcuni gravi inconvenienti:

- i concetti più difficili e astratti sono presentati per primi e la loro non-comprensione blocca l'apprendimento di quello che segue;
- lo studente non percepisce la necessità di un procedimento così formale e "statico", di cui vedrà (forse) le applicazioni solo in un secondo momento.

La difficoltà maggiore è sicuramente la prima: l'usuale presentazione del limite e della derivata non è supportata da una adeguata quantità di esempi; in altre parole si costruisce una teoria senza "fatti" da giustificare con essa.

Con questa presentazione si vuole indicare un percorso didattico che mira a costruire una situazione più equilibrata, aumentando il numero di "fatti concreti" noti allo studente prima di affrontare lo studio rigoroso di limiti e derivate.

Alcuni dei vantaggi di questa impostazione sono:

- la conoscenza "anticipata" di risultati sulle derivate (derivate di funzioni elementari, proprietà della derivata);
- la possibilità di utilizzare prima (del solito) questi concetti in Fisica;
- la presentazione di contesti in cui si deve utilizzare il concetto di limite;
- la giustificazione del perché è necessario parlare di limiti.

I prerequisiti richiesti per seguire questo percorso sono:

1. saper riconoscere e operare con i grafici delle funzioni elementari (funzioni potenza, funzioni trigonometriche elementari, esponenziale e logaritmo);
2. saper descrivere questi grafici utilizzando i concetti di crescenza, decrescenza, concavità e convessità in un intervallo;
3. conoscere il significato di pendenza di una retta, in particolare la relazione tra il segno della pendenza e la crescenza/decrescenza della retta;
4. avere chiaro il concetto di incremento di una funzione da $x$ a $x+h$, quello di rapporto incrementale e il legame tra la pendenza della retta secante e il rapporto incrementale.

**Un ambiente dinamico per la grafica di funzioni**

Il percorso che proponiamo si basa su una serie di scoperte che gli studenti fanno autonomamente con l'utilizzo di uno strumento informatico, in particolare di un sistema software di geometria dinamica.

Esistono moltissimi programmi che permettono di tracciare grafici di una funzione assegnandone l'espressione analitica. Ognuno di questi software ha qualche caratteristica per cui è preferibile agli altri, ma nessuno (forse) possiede tutte le qualità che lo possono rendere il sicuro vincitore della competizione.

Il requisito per noi fondamentale è la possibilità di visualizzare una famiglia di funzioni dipendenti da un parametro, gestendo il parametro in modo intuitivo ed efficace. Possiamo ottenere questo risultato, ad esempio, con Cabri II Plus oppure con TI-nspire.
In entrambi i casi non si tratta però semplicemente di utilizzare gli strumenti messi a disposizione dal programma, ma dobbiamo introdurre appositi strumenti.

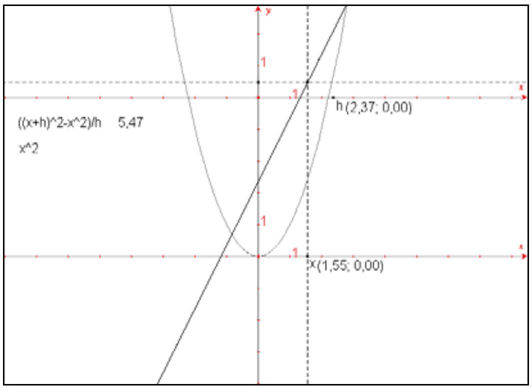
**Rapporto incrementale e derivata: un esempio**
Tradizionalmente, dopo aver affrontato i limiti, si studia la derivata in un punto per poi passare alla funzione derivata in un intervallo.
Al contrario, definiamo subito in tutto il dominio di *f* la funzione rapporto incrementale

$$y = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

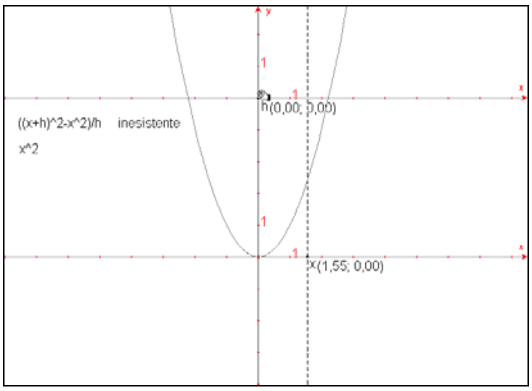
come una funzione della variabile *x* dipendente dal parametro $h \neq 0$ e studiamo in particolare che cosa accade quando *h* tende a zero.
Ad esempio, se consideriamo $f(x) = x^2$, il rapporto incrementale è

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h},$$

di cui possiamo tracciare il grafico (in figura si ha *h*=2,37).




Dopo aver costruito questa figura, lo studente la può esplorare, muovendo il punto *h*; osserva così che il grafico del rapporto incrementale è una retta di pendenza 2 e intercetta *h*.
Avvicinando *h* al valore 0, la retta tende a passare per l'origine, ma se *h* è esattamente zero Cabri non disegna alcun grafico.




Lo studente però non ha difficoltà a congetturare che quando *h* "tende" a zero, il rapporto incrementale "tende" a 2*x*; dopo aver introdotto la terminologia e il simbolo di derivata *f* ', possiamo esplicitare il primo "fatto concreto": la derivata di $f(x) = x^2$ è $f'(x) = 2x$.

A questo punto, è bene stimolare lo studente a dare una giustificazione di questo fatto, ricorrendo al calcolo simbolico. La sequenza dei passaggi è:

$$y=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}=\frac{2hx+h^2}{h}=2x+h,$$

che conferma i risultati ottenuti sul rapporto incrementale e sulla derivata di $f(x)=x^2$.

Occorre però insistere, anche in questo esempio molto semplice, sul fatto che queste uguaglianze sono vere solo se $h$ non è nullo; per chiarire come da esse sia possibile ricavare una informazione sulla derivata occorre stabilire che cosa significa "$h$ tende a zero"; abbiamo creato una motivazione per parlare di limiti.

**Gli sviluppi del percorso didattico**

Utilizzando l'ambiente che abbiamo creato (sia in Cabri che in TI-nspire) possiamo proseguire con l'esplorazione di altre situazioni. In particolare vediamo:

1. la derivata delle funzioni potenza;
2. la derivata della somma e legame tra derivata e monotonia;
3. la derivata della funzione seno e la scoperta del limite $\frac{\sin t}{t}\xrightarrow[t\to 0]{}1$;
4. la derivata della funzione esponenziale e la scoperta del limite $\frac{a^t-1}{t}\xrightarrow[t\to 0]{}\ln a$;
5. il ruolo del numero di Nepero.

Alla fine di questo percorso abbiamo ottenuto alcuni risultati rilevanti.

In primo luogo, abbiamo trovato la derivata delle funzioni elementari e intuito alcune regole di derivazione; possiamo così utilizzare "prima del solito" le derivate, sia in un contesto matematico che in un contesto applicativo, aumentando sensibilmente la familiarità dello studente con questo strumento.

In secondo luogo, abbiamo presentato alcune situazioni in cui emerge la necessità di parlare di limiti e alcuni casi di limite particolarmente importanti (i cosiddetti "limiti notevoli").

.

## Riferimenti bibliografici


Boieri P. (2004) Cabri e le funzioni, *Atti del Convegno Cabriworld 2004*, Roma, Mediadirect.

Boieri P., Dané C. (2006) Un approccio grafico alla derivata e alle sue proprietà (prima parte), *La Matematica e la sua didattica*, *20*, 470-484.

Boieri P., Dané C. (2006) Un approccio grafico alla derivata e alle sue proprietà (seconda parte), *La Matematica e la sua didattica*, *20*, 674-688.